המכללה האקדמית להנדסה ע"ש סמי שמעון

היחידה למתמטיקה

25/7/2017
9:00-12:00

חדו"א 2 להנדסת תוכנה
0-300101
מועד ב'
ד"ר יבגניה אקרמן, ד"ר עדי ניב
תשע"ז, סמסטר ב'

חומר עזר:
ניתן להשתמש במחשבון (לא גרפי) עם צג קטן.
ניתן להשתמש בדפי נוסחאות של המרצה (מצורף).
סטודנטים בעלי התאמה, זכאים להשתמש בדף נוסחאות מורחב שימסר על ידי הבוחנים במעמד הבחינה.

הוראות מיוחדות:
נמק תשובותייך. תשובה ללא הסבר, אפילו נכונה, לא תתקבל.

השאלון מכיל 5 עמודים (כולל עמוד זה ודפי נוסחאות).

בהצלחה!

שאלות 1 ו-2 חובה!

שאלה מס' 1 (20 נק')

נתונה הפונקציה $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$

א. (8 נק') מצא נקודות מינימום ומקסימום מקומיים של הפונקציה.

ב. (12 נק') מצא ערך גדול ביותר וערך קטן ביותר של הפונקציה בתחום $\{1 \le x \le 4\,, -3 \le y \le 2\}$.

שאלה מס' 2 (22 נק')

א. (12 נק') (i) (4 נק') הגדר מכפלה סקלרית בין וקטורים $\vec{a}$ ו $\vec{b}$.

(ii) (2 נק') נסח תנאי לכך ש $\vec{a}$ ו $\vec{b}$ מאונכים ונמק טענתך.

(iii) (6 נק') מצא את אורך $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$ אם נתון $|\vec{b}| = 3\,, |\vec{c}| = 1$ והזוית בין $\vec{b}$ ל $\vec{c}$ היא 30° .

ב. (10 נק') רשום את משוואת המישור העובר דרך נקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ במאונך לוקטור $\vec{N} = (A, B, C)$, והוכח זאת.

פתרו 3 מבין השאלות 3-6

שאלה מס' 3 (16 נק')

א. (10 נק') מצא משוואת מישור העובר דרך הישר $\begin{cases} x + y + 7z = 2 \\ 2x + y + 12z = 3 \end{cases}$ ומקביל לישר $\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

ב. (6 נק') מצא את הזוית בין המישור שמצאת בסעיף א' לבין הישר העובר דרך $B(2,0,0)$ ומאונך למישור XZ.

שאלה מס' 4 (16 נק')

א. (10 נק') עבור האינטגרל הנתון, שרטט תחום האינטגרציה, החלף סדר אינטגרציה וחשב:

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} y dy$$

ב. (6 נק') פתור את המשוואה הדיפרנציאלית: $y' = -2(x+1)y$ עם תנאי ההתחלה: $y(0) = 1$.

שאלה מס' 5 (16 נק')

א. (9 נק') שרטט במרחב את הגוף החסום על ידי המשטחים:
$z = 0\ ,\ x^2 + y^2 = 4\ ,\ x + y + z = 10$ והשב את ניפחו.

ב. (7 נק') שרטט את הגוף המישורי החסום על ידי הקווים: $y = x\ ,\ y = -x\ ,\ y = \sqrt{16 - x^2}$
וחשב את מסתו אם צפיפותו נתונה על ידי $\rho = 3$.

שאלה מס' 6 (16 נק')

א. (8 נק') מצא תחום התכנסות הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$$

ב. (8 נק') נתונה הנקודה $M(2,1)$ ונתון המשטח $z = xy + \frac{y}{x^2}$.
(i) (4 נק') מצא נגזרת כיוונית למשטח הנתון בנקודה M ובכיוון $-3i + 4j$.
(ii) (4 נק') מהו הערך **המינימלי** האפשרי לנגזרת כיוונית של z ב- M ? נמק תשובתך.

פתרו אחת מהשאלות 7-8

שאלה מס' 7 (10 נק')

עבור אילו ערכים ממשיים של הפרמטר a קיים הגבול $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-ay}{ax+y}$? נמק את תשובתך.

שאלה מס' 8 (10 נק')

הרכב את משוואת הספירה שמרכזה ב- $O(0,1,2)$ והיא משיקה לישר העובר דרך הנקודות $A(1,1,0), B(0,2,4)$. צייר שירטוט מתאים (מערכת הצירים איננה הכרחית).

בהצלחה!

1. נפח של פירמידה משולשת ABCD : $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{DA}\times\overline{DB}\right)\cdot\overline{DC}\right|$

2. מרחק מהנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax + By + Cz + D = 0$: $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3. מרחק מהנקודה M לישר העובר דרך הנקודה N במקביל לוקטור $\bar{a}$: $d = \frac{\left|\overline{MN}\times\bar{a}\right|}{|\bar{a}|}$

4. מרחק בין שני ישרים מצטלבים שעוברים דרך נקודות M ו- N במקביל לוקטורים a ו- b):

$$d = \frac{\left|\overline{MN}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right|}{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}$$

5. משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$ במאונך לוקטור נורמל $n(A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

6. הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0) במקביל לוקטור $a(l, m, n)$:

$$\{x = x_0 + l\cdot t,\quad y = y_0 + m\cdot t,\quad z = z_0 + n\cdot t\}\quad -\infty < t < \infty$$

7. משוואת מישור המשיק למשטח $F(x,y,z)=0$ בנקודה $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

8. נגזרת מכוונת של $z(x,y)$ בנקודה M_0 ובכיוון של וקטור $\bar{a}$: $\frac{dz(M_0)}{d\bar{a}} = \frac{grad\ z(M_0)\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}$

9. קריטריון $\boxed{\Delta(M) = f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M) - \left(f''_{xy}(M)\right)^2}$ לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של f(x)

10. פונקצית לגרנז' למציאת אקסטרמום של f(x,y) בתנאי $\varphi(x,y)=0$: $\boxed{L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)}$

11. מעבר לקואורדינטות קוטביות: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$

12. חישוב המסה m ומרכז המסה (x_c, y_c) של "גוף מישורי" D בעל צפיפות $\rho(x,y)$:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy;\quad x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy;\quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy$$

13. חישוב של אינטגרל קווי מסוג ראשון:

א) המסלול L מוגדר באופן $y = y(x)$: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}dx$

ב) מסלול L מוגדר באופן פרמטרי: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$

14. נוסחת גרין: $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

15. מבחני קושי ודלמבר לבדיקת התכנסות של **טורים חיוביים:**

אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ (דלמבר) או אם קיים הגבול $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q}$ (קושי)

אזי אם $q < 1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ואם $q > 1$ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

16. **רדיוס ההתכנסות** R של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ או $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

17.טור טיילור עבור הפונקציה $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

18. טורי מקלורן עבור מספר פונקציות בסיסיות:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...\ [-1<x<1];\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...;\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...\ [-\infty<x<\infty]$$

19. נגזרות:

1. $(c)'=0,\ c=const;$ 2. $(x^n)'=nx^{n-1};$

3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a;$ 4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};$

5. $(\sin x)'=\cos x;$ 6. $(\cos x)'=-\sin x;$

7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x};$ 8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$

9. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};$ 10. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

11. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ 12. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2};$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2};$$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

<u>פונקציה פרמטרית:</u>

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

20. אינטגרלים

1. $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C\qquad(n\neq-1)$

2. $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C;$ 3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

4. $\int\sin(ax)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$

5. $\int\cos(ax)dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+C$

6. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$ 7. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$

8. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\left(\frac{x}{a}\right)+C$;

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

10. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right|+C$

<u>אינטגרציה לפי חלקים:</u>

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

<u>הצבה טריגונומטרית אוניברסלית:</u>

$$tg\frac{x}{2}=t,\ x=2arctg\,t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

11. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$

12. $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C;$ 13. $\int\frac{xdx}{x^2+a}=\frac{\ln|x^2+a|}{2}+C$

14. $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=2\cdot\sqrt{f(x)}+C;$ 15. $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$

16. $\int tgx\,dx=-\ln|\cos x|+C;$ 17. $\int ctgx\,dx=\ln|\sin x|+C$

21. נוסחאות טריגונומטריות:

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;\quad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x;$

$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x);\quad 2\sin^2(x)=1-\cos(2x);\quad 2\cos^2(x)=1+\cos(2x);$

$(u=0.5(x+y),\ v=0.5(x-y))\rightarrow \sin(x)+\sin(y)=2\sin(u)\cos(v);\ \sin(x)-\sin(y)=2\sin(v)\cos(u);$

$\cos(x)+\cos(y)=2\cos(u)\cos(v);\quad \cos(x)-\cos(y)=-2\sin(u)\sin(v)$

$2\sin x\sin y=\cos(2v)-\cos(2u);\ 2\cos x\cos y=\cos(2u)+\cos(2v);\ 2\sin x\cos y=\sin(2u)+\sin(2v)$

בהצלחה!